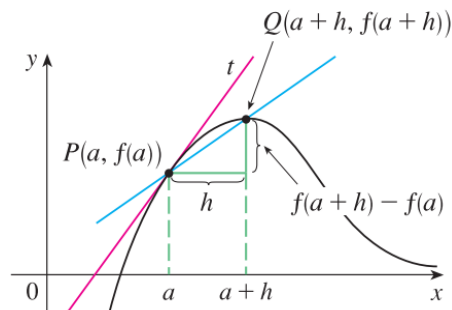


## CONSTRUCCIÓN DE LA FUNCIÓN DERIVADA CON EL EMPLEO DE LA CALCULADORA CLASSWIZ FX-991EX Y LA APP CASIO EDU PLUS

José Alejandro López Rentería  
[j.alejandro.lopez.renteria@gmail.com](mailto:j.alejandro.lopez.renteria@gmail.com)  
Facultad de Ingeniería Química, UADY  
Mérida, Yucatán, México

### Introducción

El estudio de la derivada en el nivel superior inicia con el análisis de la derivada de una función de manera puntual, es decir, con el estudio de  $f'(x)$  en un punto  $x = a$ . En este sentido la derivada se introduce escolarmente con el problema de la recta tangente en un punto a la gráfica de una función  $y = f(x)$ , en el que una recta secante tiende a ser una recta tangente en  $x = a$  cuando un incremento  $h$  tiende a cero (ver imagen).



$$f'(a) = m = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

A partir de este resultado, un estudiante puede calcular la pendiente de la recta tangente mediante un límite que luego se define como la derivada de una función en el punto  $x = a$ . Sin embargo, en algunas ocasiones no se usa este análisis para construir **la función derivada**  $f'(x)$ , es decir, no se generaliza este límite para cualquier valor de  $a$  en el dominio de la función  $f$ ; sino que se omite y se pasa al uso de técnicas y fórmulas básicas para derivar funciones.

Por ejemplo, un estudiante aprende de memoria que la derivada de una función polinomial de grado tres de la forma  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  es  $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ , o que la derivada de una función exponencial de la forma  $g(x) = c(b^x)$  es  $g'(x) = c \ln b (b^x)$ , pero no analiza por qué es válido usar dichas fórmulas para derivar este tipo de funciones.

Dado lo anterior, este documento presenta una actividad que tiene como objetivo darle sentido a la función derivada a partir del análisis de las derivadas puntuales.

Primeramente, se obtienen los valores de las derivadas puntuales en diferentes valores de  $x$  con ayuda de la calculadora científica Classwiz y, posteriormente, con la herramienta de regresión y con el uso de la aplicación CASIO EDU PLUS se construye la expresión de la función derivada dada una función  $f$ .

### La actividad de aprendizaje a resolver

Dadas las siguientes funciones:

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 5x - 1 \quad \text{y} \quad g(x) = 5(3^x)$$

Realice para cada una lo que se pide en cada inciso:

- Construya una tabla de diez valores de la derivada en un punto  $x = a$  tomando diferentes valores de  $a$  del dominio de la función (sin usar las técnicas de derivación conocidas).
- Ubique en el plano cartesiano las parejas de puntos de la tabla del inciso  $a$  y deduzca (a partir de su forma) el tipo de función que podría estar asociada a los puntos obtenidos (p.e. polinomial, trigonométrica, exponencial, entre otras).
- Con ayuda de un software trace una curva que se ajuste lo más posible a los puntos de la tabla.
- Obtenga con ayuda del mismo software la expresión algebraica de la curva que se ajusta lo más posible a los puntos dados.
- Derive la función aplicando las técnicas y fórmulas de derivación y compara la derivada con la expresión algebraica obtenida en el punto  $d$ . ¿Cómo son estas funciones? Explique.

### Análisis y solución de la actividad

Esta actividad puede ser aplicada para estudiantes de primer semestre de carreras de ingenierías o del área de las ciencias exactas, ya que se requieren conocimientos previos como: Concepto de función, dominio, rango, graficas de funciones con tablas, técnicas y fórmulas de derivación básicas, entre otros.

Sin embargo, otros conocimientos como el de "Ajustes de curvas" para un conjunto de puntos, se han de introducir por el profesor con ayuda de la tecnología CASIO.

- Para construir la tabla de valores de la derivada en diferentes puntos del dominio de las funciones dadas, como se ha indicado no derivar directamente las funciones, los estudiantes se verán en la necesidad de usar la definición de límite para calcular el valor de la derivada en cada punto.

Por ejemplo, para la función  $f(x) = x^3 - 2x^2 + 5x - 1$  si se quiere calcular el valor de la derivada en  $x = 1$  entonces se procederá de la siguiente forma:

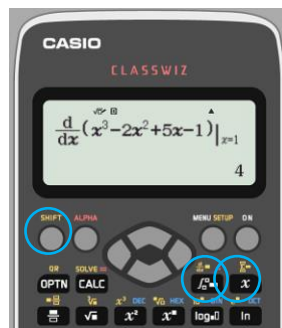
$$f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

$$f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[(1+h)^3 - 2(1+h)^2 + 5(1+h) - 1] - [1^3 - 2(1)^2 + 5(1) - 1]}{h}$$

Simplificando el límite se obtiene:

$$f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(h^2 + h + 4)}{h} = 4$$

Este proceso se realiza hasta completar los diez valores de la tabla, lo cual es un proceso largo y tedioso. Si embargo, con ayuda de la calculadora Classwiz los estudiantes pueden calcular los valores de la derivada en cada punto de manera simple. Para ello se ingresa al menú "Calculate" y se usa la función *derivada* (SHIFT y el botón que tiene el símbolo de derivada en la parte superior), luego se ingresa la expresión algebraica de la función con ayuda del botón de la variable  $x$  y finalmente se ingresa el valor en el cual se quiere calcular, como se ilustra a continuación:

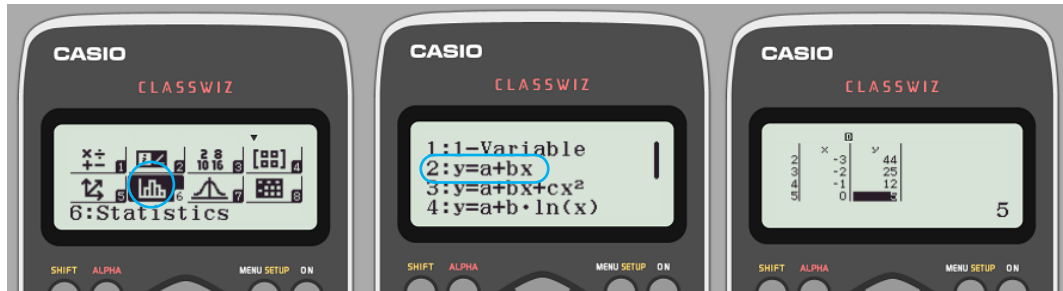


Las tablas que se construyan dependen de los valores que se tomen de  $a$ . Por ejemplo, dos tablas posibles son:

$a$	$f'(a)$
-4	69
-3	44
-2	25
-1	12
0	5
1	4
2	9
3	20
4	37
5	60

$a$	$g'(a)$
-4	0.067815573
-3	0.20344672
-2	0.61034016
-1	1.831020481
0	5.493061443
1	16.47918433
2	49.43755299
3	148.312659
4	444.9379769
5	1334.813931

- b. Para ubicar las parejas de puntos obtenidas en el plano cartesiano e identificar el tipo de función con base en su forma, se capturan las tablas en la Classwiz ingresando al menú “Statistics”, se selecciona la opción dos de la primera pantalla y luego se procede a capturar los datos como se observa enseguida:



Posteriormente, con la tabla capturada, se genera el *código QR* (SHIFT y el botón que dice QR en la parte superior) el cual permite la visualización de un diagrama de puntos con ayuda de la aplicación CASIO EDU PLUS en el plano cartesiano.



Los diagramas obtenidos mediante la aplicación para los ejemplos que se han presentado son:

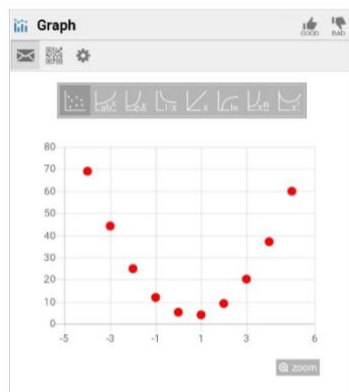


Diagrama de puntos de  $a$  y  $f'(a)$

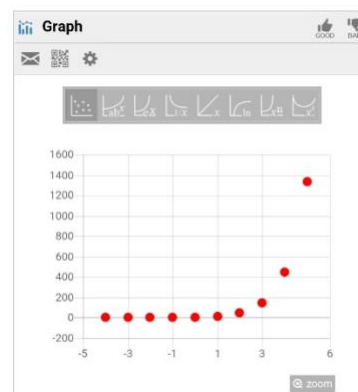
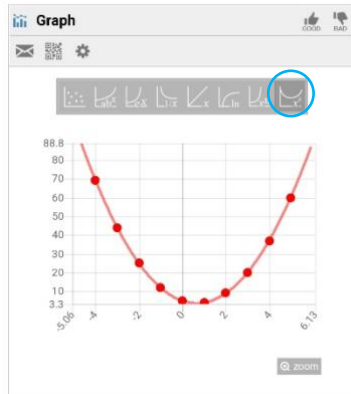


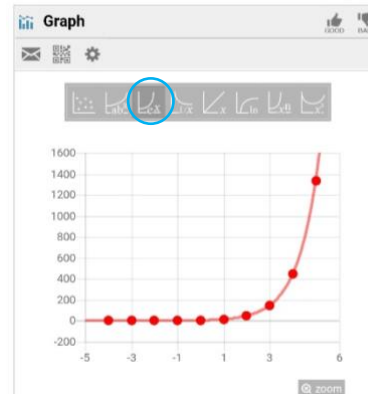
Diagrama de puntos de  $a$  y  $g'(a)$

Como se observa, el primer conjunto de puntos tiene forma de parábola, por lo que se deduce que el tipo de función asociada es un polinomio de grado dos; mientras que en el segundo caso la forma de los puntos señala que podría estar asociada una función exponencial.

- c. Otra de las bondades de la aplicación permite ajustar diferentes curvas de acuerdo con un tipo de función, para ello se selecciona el tipo que se considere en cada caso. Por tanto, las gráficas con curvas de ajuste quedan de la siguiente forma:

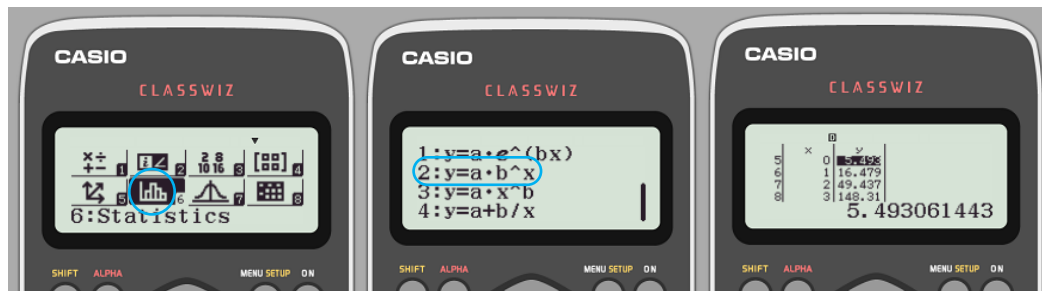


Curva de ajuste de  $f'(a)$



Curva de ajuste de  $g'(a)$

- d. Una forma de obtener la expresión algebraica de dichas curvas mediante la Classwiz es con el menú "Statistics". Primero se elige el "modelo de regresión" de acuerdo con el tipo de función identificada. Luego se capturan los datos como se hizo anteriormente. Por ejemplo, para los puntos de  $g'(a)$  se elige el modelo exponencial de la opción dos, ya que es el tipo de curva que se ajusta a los datos:



Posteriormente se presiona el botón "OPTN" y se elige la opción cuatro del menú para calcular los coeficientes del modelo:



Como se observa los modelos obtenidos son:

$$y = 5 - 4x + 3x^2 \quad \text{y} \quad y = 5.493061439(3^x)$$

- e. Por último, al derivar las funciones  $f$  y  $g$  con las técnicas y fórmulas de derivación conocidas se obtiene:

$$f(x) = 3x^2 - 4x + 5 \quad \text{y} \quad g(x) = 5 \ln 3 (3^x)$$

Las cuales son iguales a las expresiones que se obtuvieron a través de la regresión, ya que los valores de los coeficientes de las funciones coinciden. Por tanto, las funciones construidas con las tablas de puntos son las funciones derivadas de  $f$  y  $g$ .

### Consideraciones finales

Con esta actividad se observa que es posible integrar diversas funciones de la calculadora Classwiz y la aplicación CASIO EDU PLUS en el aprendizaje y construcción de conceptos como el de la función derivada, que en ocasiones pasa desapercibido en el aula.

Así como estos ejemplos, es posible tomar otros tipos de funciones y analizarlos mediante las tablas y la herramienta de regresión, cuidando que el tipo de construcción sea similar.

Finalmente, esta actividad también invita a reflexionar sobre la integración de tecnología en el aula, ya que no sólo resulta atractiva para el estudiante, sino que facilita algunos procesos matemáticos que sólo distraen la atención de los análisis que son primordiales.

### Referencias bibliográficas

Larson, R. & Edwards, B. (2010). *Calculus*. (9a Ed.). USA: Cengage Learning.

Stewart, J. (2012). *Cálculo de una variable, trascendentes tempranas*. (7ª Ed.) México: Cengage Learning.